EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

36e JAARGANG 1960/61
I - 1 SEPTEMBER 1960

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE ANALYSE VAN HET CONTINUUM DOOR ARISTOTELES

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

In een vorig artikel over de historische achtergronden van de infinitesimaalrekening [1]) hebben we gezien, dat een onvoldoend inzicht in de structuur van het continuum een strenge fundering van de infinitesimaalrekening in de weg gestaan heeft. Reeds in de Griekse oudheid heeft men zich bezig gehouden met de problemen, die de structuur van het continuum raken. De bedoeling van dit artikel is te laten zien, hoe Aristoteles getracht heeft deze problemen tot oplossing te brengen.

Vooraf wil ik echter opmerken, dat het samenstellen van dit artikel voor mij niet moeilijk geweest is, omdat de passages, uit de werken van Aristoteles, die op dit onderwerp betrekking hebben, verzameld zijn door Oskar Becker en te vinden zijn in zijn boek: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.* [2])

De eerste aanleiding in de geschiedenis tot bezinning op het begrip continuum en in zekere zin op de beginselen van de differentiaalrekening is gegeven door Zeno ($\pm$ 450 v.C.). Hij heeft een serie hoogst merkwaardige paradoxen opgesteld, waarvan er hier enige volgen.

1. Als er een veelheid van dingen bestaat, dan moet deze veelheid uit een bepaald, begrensd aantal delen bestaan. Anderzijds weten we, dat tussen twee dingen steeds weer andere dingen liggen, dus dat het aantal dingen, indien er een veelheid is, onbegrensd moet zijn. Het is dus onmogelijk, dat er een veelheid bestaat. Het heelal is één ondeelbare eenheid.

2. Een vliegende pijl bevindt zich elk ogenblik op een bepaalde plaats. Op een bepaalde plaats kan de pijl echter alleen maar in rust zijn. Het is dus niet mogelijk, dat de pijl in beweging is. Anders geformuleerd: het bewogene beweegt zich noch in de ruimte, waarin het zich bevindt, noch in de ruimte, waarin het zich niet bevindt. Beweging is dus niet mogelijk.

[1]) Euclides, 35, blz. 305

[2]) Verlag Karl Alber, Freiburg - München, 1954, p. 64—77. Voor degenen, die zich voor de historische ontwikkeling van de grondslagen der wiskunde interesseren, is dit boek van zeer grote waarde.

3. Ten slotte de bekende paradox van Achilles en de schildpad. De schildpad bevindt zich in A. Achilles tracht hem in te halen, maar zodra hij in A is aangekomen, blijkt de schildpad zich niet meer in A, doch in B te bevinden, enz. Dus zal Achilles de schildpad nooit inhalen. Dat men in werkelijkheid waarneemt, dat Achilles de schildpad wel inhaalt, kan alleen daarop berusten, dat men de werkelijkheid, zoals die is, niet adequaat waarneemt.

4. Een iets eenvoudiger versie van deze paradox is, dat men een bepaalde weg nooit kan afleggen, want men moet eerst de helft afleggen, daarna de helft van het resterende deel, enz. en slaagt er dus niet in de gehele weg te doorlopen.

Zeno trekt uit deze paradoxen de conclusie, dat het heelal een ondeelbare en onveranderlijke eenheid is en dat de verscheidenheid van de waargenomen zinnelijke kwaliteiten en veranderingen op zinsbedrog berust. Het spreekt vanzelf, dat deze conclusie in de Griekse oudheid tot veel verzet aanleiding gegeven heeft. Het was echter niet eenvoudig door een redenering de paradoxen te ontzenuwen. De eerste, die daarin geslaagd is, is Aristoteles (± 350 v.C.).

In zijn Physica geeft Aristoteles een analyse van de structuur van het lineaire continuum, die van een grote virtuositeit getuigt. Hij beschouwt daartoe verschillende soorten eendimensionale ordeningen van gelijksoortige grootheden, die de eigenschap hebben een eerste en een laatste element te bezitten. Het kan zijn, dat opeenvolgende elementen elkaar niet aanraken, zoals bij de rij der natuurlijke getallen. Het kan ook zijn, dat opeenvolgende elementen elkaar wel aanraken (een gemeenschappelijke grens hebben), zoals bij een rij naast elkaar liggende kogels. Deze hebben, wegens het aanraken, een gemeenschappelijke grens. Hoewel de grens van de ene kogel ter plaatse van de aanraking ruimtelijk samenvalt met die van de andere, zijn deze grenzen toch verschillend, daar elk slechts tot één van de beide kogels behoort. Anders is de situatie bij een continuum. Deelt men dit in tweeën, dus in twee delen, die elk weer bestaan uit een eendimensionale verzameling van elementen met een eerste en een laatste element, dan zullen de grenzen van beide delen ter plaatse, waar ze elkaar raken, niet alleen ruimtelijk samenvallen, doch bovendien identiek zijn. Het eindpunt van het ene deel is tegelijk beginpunt van het andere deel. Heffen we de scheiding tussen de twee delen op, dan groeien ze weer aaneen tot een geheel, in tegenstelling tot hetgeen gebeurt, als we twee series rakende kogels met elkaar in aanraking brengen en zo tot één serie verenigen. In het eerste geval houdt de grens op grens te zijn, in het tweede geval blijft de grens

bestaan. Deze identiteit van de grens tussen twee delen is volgens Aristoteles de kenmerkende eigenschap van het continuum.

Op het eerste gezicht lijkt het, dat Aristoteles hier onverantwoorde dingen beweert. Het is daarom dienstig te trachten zijn woorden in moderne taal te vertalen. Hij beweert eigenlijk, dat het niet mogelijk is het continuum in twee gesloten continua te verdelen, die geen element gemeen hebben. Wel is het mogelijk een continuum te beschouwen als somverzameling van twee continua, die slechts één element gemeen hebben. Als men dit voor ogen houdt, zal men zien, dat zijn verdere uiteenzettingen zinvol zijn.

Als voorbeeld kiest hij een lijn. De ondeelbare bestanddelen van een lijn zijn punten. Hij vraagt zich nu af, of het mogelijk is een lijn uit punten op te bouwen, zoals een serie kogels uit kogels opgebouwd kan worden. We proberen twee punten met elkaar in aanraking te brengen. Van een partiële aanraking kan dan geen sprake zijn, omdat de punten ondeelbaar zijn. Ze moeten elkaar dus „als geheel" aanraken. Volgens de boven gegeven omschrijving van een continuum moeten ze, wil er een continuum ontstaan, dan geheel samenvallen. Door achtereenvolgens punten met elkaar in aanraking te brengen kan dus geen continuum ontstaan. Uit deze redenering volgt meteen, dat het niet mogelijk is, dat op een continuum consecutieve punten zouden bestaan; elk tweetal punten is een stel eindpunten van een deelcontinuum. In het bijzonder volgt hieruit ook, dat onderverdelingen van een continuum in twee echte delen steeds weer uit continua bestaan [1]).

Uit het voorgaande volgt, dat men een continuum in twee continua kan verdelen, deze delen weer in twee continua kan verdelen, enz. en zo nooit tot een eind kan komen. Met een continuum is dus in principe een oneindigheid van continua gegeven. Een continuum is weliswaar niet onderverdeeld in oneindig veel continua, maar heeft de mogelijkheid in zich steeds weer onderverdeeld te worden zonder dat dit proces ooit tot een definitief einde geraakt. Hoewel Aristoteles, evenals Zeno, een actuele oneindigheid onmogelijk acht, erkent hij hiermee een potentiële oneindigheid. De eerste paradox van Zeno is daarmee tot oplossing gebracht. Als er een veelheid bestaat, is het niet juist te zeggen, dat deze uit een bepaald, begrensd aantal delen moet bestaan, maar wel, dat deze veelheid potentieel oneindig is.

Met *actuele* oneindigheid wordt bedoeld het werkelijk aanwezig zijn van oneindig veel dingen. Zowel Zeno als Aristoteles achten dit dus uitgesloten. De kern van Zeno's eerste paradox is namelijk, dat uit het feit, dat er een veelheid van dingen bestaat, zou volgen, dat er een oneindige veelheid van dingen bestaat, hetgeen volgens hem niet mogelijk is.

[1]) Indien één van beide delen een punt was, was het andere deel het gehele continuum.

Met *potentiële* oneindigheid wordt bedoeld, dat het mogelijk is op de werkelijkheid een denkoperatie herhaald toe te passen op zodanige wijze, dat aan de herhaalbaarheid geen grens gesteld wordt. Een dergelijke operatie is b.v. in het de geest steeds weer halveren van een gegeven continuum. Aristoteles heeft hiertegen geen bezwaar en acht deze potentiële oneindigheid principieel inherent aan de structuur van het continuum. De wijze, waarop Aristoteles de paradoxen van Zeno ontzenuwt, komt daarop neer, dat hij aantoont, dat er slechts een potentiële oneindigheid aan ten grondslag ligt, terwijl Zeno van mening was, dat een actuele oneindigheid het noodzakelijk gevolg van zijn redeneringen zou zijn.

Aristoteles licht deze potentiële oneindigheid toe door haar te vergelijken met de opvolging van de dagen. Hoewel er niet een oneindige opvolging van dagen actueel aanwezig is, kunnen we toch zeggen, dat op elke dag weer een dag volgt en dat deze opvolging aan geen grens gebonden is.

Men kan een continuum dus in een potentieel oneindige serie deelcontinua verdelen. Keren we de richting van deze bewerking om, dan zien we, dat hieruit volgt, dat men een continuum uit een potentieel oneindige serie deelcontinua kan opbouwen. Zo kunnen we een continuum opbouwen door er eerst de helft van te nemen, daarna er de helft van de ontbrekende helft aan toe te voegen, enz. Ook dit proces is eindeloos. Het is niet actueel uitvoerbaar, maar men kan zich zo het continuum ontstaan denken. Hieruit volgt, dat de bewering van Zeno, dat het niet mogelijk zou zijn een onbegrensde menigvuldigheid in een eindige tijd te doorlopen, onjuist is. Ook de tijd is een continuum, dat zich op dezelfde wijze laat onderverdelen als het ruimtelijk continuum. Men doorloopt dus eerst het halve lijnstuk in de halve tijd, daarna het vierdedeel in het vierdedeel van de totale tijd, enz. Hierin is geen paradox besloten. Als men van mening is, dat men ondertussen deze handelingen ook kan aftellen, dus als het ware tot oneindig zou kunnen tellen, dan komt men inderdaad tot een onmogelijkheid, maar dit is dan ook niet zo.

De laatste paradox van Zeno vindt zijn oplossing dus daarin, dat de doorlopen tijd en het doorlopen lijnstuk op dezelfde wijze als potentiële oneindigheid opgevat kunnen worden. Tegelijk hiermee vervalt het paradoxale in het gedrag van Achilles, als hij tracht de schildpad in te halen. Wel kan men zeggen, dat er een oneindige serie tijdstippen is, waarop Achilles de schildpad nog niet heeft ingehaald en dus een oneindige serie opvolgende tijdcontinua, waarin het inhalen nog niet plaats heeft. Hieruit volgt echter geenszins, dat inhalen dan ook überhaupt niet kan plaats vinden. We vonden immers, dat een continuum zich liet opbouwen uit een dergelijke oneindige serie deelcontinua. Het eindpunt van het totaalcontinuum, waarvan al deze continua de samenstellende delen zijn, is dan juist het ontmoetingstijdstip.

Een speciale beschouwing wijdt Aristoteles nog aan het begrip beweging om tot ontzenuwing van de tweede paradox te komen. De achtergrond van de paradox is gelegen in de foutieve aanname van Zeno, dat de baan van de pijl uit een som van punten zou bestaan, hetgeen in strijd is met de Aristotelische definitie van een continuum. Als de beweging bestond uit het zich op achtereenvolgende ondeelbare tijdstippen bevinden op achtereenvolgende ondeelbare ruimtedelen, dan was er tegen Zeno's argumentatie weinig in te brengen. Dit is echter niet het geval. Men kan alleen ertoe besluiten, dat de pijl zich op de plaats, waar hij zich bevindt, in rust is, als er een tijdcontinuum bestaat, gedurende hetwelk de pijl op dezelfde plaats blijft. De pijl blijkt dus niet in rust te zijn [1]). Wel kan men zeggen, dat de pijl zich in een steeds korter gekozen tijdsdeel over een overeenkomstig steeds kortere afstand verplaatst en dat aan het korter kiezen van de tijdsdelen, gezien de potentiële oneindigheid van het continuum, geen grens gesteld is. Hierin is echter niets paradoxaals meer gelegen.

Op geniale wijze heeft Aristoteles hier de grondslag gelegd voor de analyse van het begrip continuum en ook, en dit is in verband met het gekozen onderwerp van veel belang, voor het begrip snelheid. Beweging is voor hem gekoppeld aan het in steeds kleinere tijdsintervallen steeds kleinere wegdelen doorlopen. Dit is de basis van ons moderne door middel van differentiaalrekening gedefinieerde snelheidsbegrip.

In de Griekse wiskunde komen we een stelling tegen, die nauw verband houdt met de Aristotelische analyse van het continuum, omdat de potentiële oneindigheid van de verdeelbaarheid van het continuum erin verondersteld wordt. Deze stelling luidt: als men van een grootheid de helft of meer wegneemt, daarna van het resterende deel weer de helft of meer wegneemt, en deze bewerking steeds voortzet, dan houdt men op de duur een grootheid over, die kleiner is dan een willekeurige gegeven grootheid. Deze stelling werd gebruikt bij het vergelijken van oppervlakten volgens de *exhaustiemethode*. Volgens deze methode bewees Euclides de stelling, dat de oppervlakten van twee cirkels zich verhouden als de vierkanten, die als zijden hebben de diameters (boek XII, propositie 2). Hij beschrijft in beide cirkels een regelmatige vierhoek. Omdat de oppervlakte van een ingeschreven vierhoek de helft is van die van een regelmatige omgeschreven vierhoek, is de oppervlakte van het buiten de vierhoek

[1]) Deze twee zinnen zijn door mij ter verduidelijking ingelast. Overal elders is nauwkeurig de gedachtengang van Aristoteles gevolgd.

gelegen deel van de cirkel minder dan de helft van de oppervlakte van de cirkel. Nu beschrijft hij in de cirkels regelmatige achthoeken. Hij laat zien, dat het buiten de achthoek gelegen deel van de cirkel minder is dan de helft van het buiten de vierhoek gelegen deel (vgl. fig. 1). Hieruit volgt dan, dat men in een cirkel een regelmatige veelhoek kan beschrijven, waarvan de oppervlakte minder van de oppervlakte van de cirkel afwijkt dan een willekeurig gegeven oppervlakte. Hier past hij dus bovengenoemde stelling toe. Het overige gedeelte van het bewijs is voor ons van geen belang. (Het geschiedt

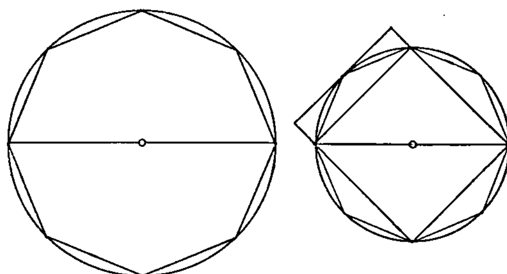


Fig. 1.

door te laten zien, dat de aanname, dat de oppervlakten van de beide cirkels zich verhouden als dat van het vierkant op de ene middellijn tot dat van een figuur, die groter of kleiner is dan het vierkant op de andere middellijn, tot een contradictie leidt.)

De exhaustiemethode is afkomstig van Eudoxus, die een tijdgenoot is van Aristoteles. Ik weet niet, of Aristoteles tevens een rechtvaardiging heeft trachten te geven van deze methode of dat het ontstaan ervan door het werk van Aristoteles is beïnvloed.

RAKETTEN

door

A. H. NICOLAI
Groningen

Er gaat op het ogenblik haast geen week voorbij of de raket-techniek doet van zich horen. Helaas wordt er op de Middelbare scholen over deze interessante materie met geen woord gerept. Toch is het mogelijk de leerlingen van de hoogste klassen een aardig beeld te geven van wat er wiskundig gezien aan de raket-techniek ten grondslag ligt. Droge materie is dit zeker niet voor de leerlingen. Zodra ze het woord „raket" horen zijn ze al geïnteresseerd. Het volgende heb ik in een drietal lessen dezer dagen met twee vierde klassen behandeld. De moeilijkheden bleken geenszins onoverkomelijk. Het dictaat zag er a.v. uit:

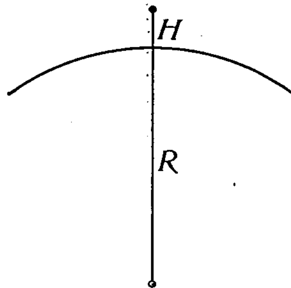
Berekening van enkele snelheden voor raketten.

We berekenen eerst de versnelling $g(H)$, welke een voorwerp krijgt als het zich op een afstand H boven het aardoppervlak bevindt.

De versnelling bij het oppervlak der aarde noemen we $g\left(= 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)$.

Volgens de wet van Newton zijn de krachten, die een lichaam met massa m ondervindt op een hoogte H en bij het aardoppervlak gelijk aan resp.

$$K(H) = f \frac{Mm}{(R+H)^2} \text{ en } K = f \frac{Mm}{R^2} \qquad (M \text{ de massa der aarde})$$



Volgens $K = ma$ geldt dus

$$K(H) = mg(H) = f\frac{Mm}{(R+H)^2} \quad \therefore g(H) = f\frac{M}{(R+H)^2}$$

$$K = mg = f\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore g = f\frac{M}{R^2}$$

dus

$$\frac{g(H)}{g} = f\frac{M}{(R+H)^2}\cdot\frac{R^2}{fM} = \frac{R^2}{(R+H)^2}$$

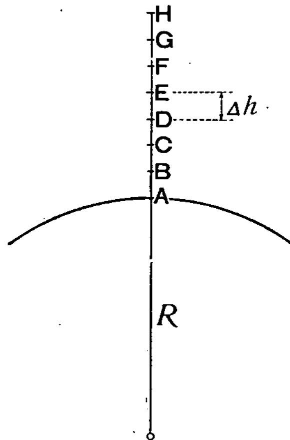
zodat

$$g(H) = g\frac{R^2}{(R+H)^2}.$$

Hierin is de straal der aarde $R = 6350$ km. Neem b.v. $H = 1000$ km. Dan ondervindt een lichaam 1000 km boven het aardoppervlak een versnelling

$$g(H) = 9{,}8\cdot\frac{6350^2}{7350^2} = 7{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

We willen nu de energie berekenen, die nodig is om het lichaam tot op een hoogte H boven het aardoppervlak te brengen. Daartoe verdelen we de afstand in kleine stukjes Δh en veronderstellen, dat voor zo'n klein stukje de $g(h)$ niet verandert.



Om het lichaam met massa m van A naar B te verplaatsen moeten we een arbeid verrichten welke gelijk is aan

$$Ks = mg\Delta h$$

Van B naar C is dit

$$mg(\Delta h)\Delta h = mg \frac{R^2}{(R + \Delta h)^2} \Delta h$$

Van C naar D

$$mg(2\Delta h)\Delta h = mg \frac{R^2}{(R + 2\Delta h)^2} \Delta h$$

Van D naar E

$$mg(3\Delta h)\Delta h = mg \frac{R^2}{(R + 3\Delta h)^2} \Delta h$$

enz. tot we in H komen.

We tellen al deze arbeidjes op; totaal

$$E_t = mg \left(1 + \frac{R^2}{(R + \Delta h)^2} + \frac{R^2}{(R + 2\Delta h)^2} + \ldots\right)\Delta h \qquad (1)$$

Hoe kleiner we Δh nemen des te nauwkeuriger de berekening wordt. Met de integraal rekening kan men dan berekenen, dat de uitkomst van (1) wordt

$$E_t = mg\, R \frac{H}{(R + H)} \qquad (2)$$

Willen we het voorwerp oneindig ver wegbrengen, zodat de aarde het niet meer aantrekt, dan wordt dus $H = \infty$

$$\frac{H}{R + H} = \frac{1}{\frac{R}{H} + 1}.$$

Als $H = \infty$ is $\frac{R}{H} = 0$ dus $\frac{H}{R + H} = \frac{1}{0 + 1} = 1$. We moeten dan een energie aan het lichaam geven gelijk $E_{ont} = mg\, R$.

Als we deze energie aan het lichaam willen meegeven in de vorm van kinetische, hoe groot moet dan de v zijn? Dan moet

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\, R;\; v^2 = 2gR \text{ dus } v = \sqrt{2gR}.$$

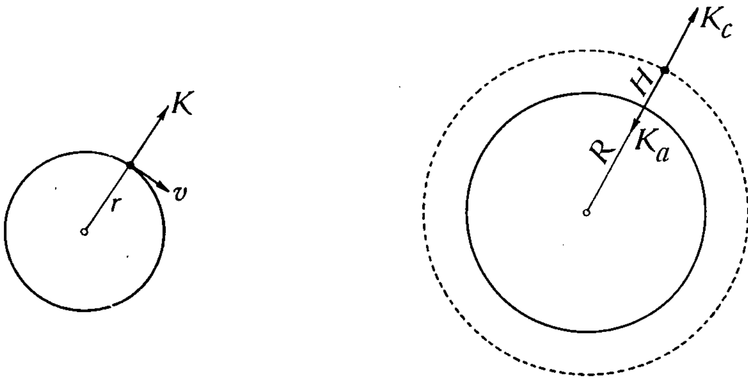
Deze v noemt men de ontsnappingssnelheid. Als we een raket zo snel wegschieten ontsnapt hij voorgoed aan de zwaartekracht der aarde.

$$g = 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 0{,}0098 \frac{\text{km}}{\text{sec}^2} \qquad R = 6350 \text{ km}$$

$$v = \sqrt{2.\ 0{,}0098 \cdot 6350} = 11{,}2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

Welke snelheid moet een raket hebben als hij op een hoogte H boven de aarde cirkelt? Hiervoor is nodig de volgende wet:

Indien een lichaam met massa m in een cirkel met straal r wordt rondgeslingerd met snelheid v, dan trekt het aan het touw met een kracht $K = \frac{mv^2}{r}$



Als een raket in een cirkel met straal $R + H$ om het middelpunt der aarde cirkelt ondervindt hij een kracht $K_c = \frac{mv^2}{R + H}$

Volgens de Newtonse aantrekkingskracht $K_a = mg(H) = \frac{mgR^2}{(R + H)^2}$

Blijft de raket op dezelfde hoogte dan moeten deze twee krachten aan elkaar gelijk zijn.

$$\frac{mv^2}{R + H} = \frac{mg\ R^2}{(R + H)^2}$$

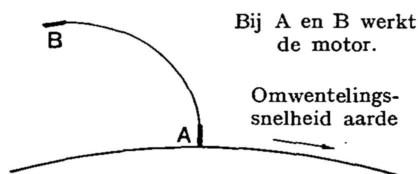
zodat

$$v^2 = \frac{gR^2}{R + H} \text{ of } v = \sqrt{\frac{gR^2}{R + H}}.$$

In zijn baan gekomen moet de raket dus een kinetische energie hebben, welke gelijk is aan $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \frac{gR^2}{R + H}$

Ter hoogte H heeft de raket bovendien een potentiële energie, welke volgens (2) gelijk is aan $E = mg \frac{RH}{R + H}$

De totaal mee te geven energie is dus $\frac{1}{2} mg \frac{R^2}{R + H} + mg \frac{RH}{R + H}$



De raket vertrekt verticaal. Men laat de motor korte tijd werken totdat hij die snelheid $\bar{v}$ heeft waarmee hij in zijn baan kan komen.

Dan moet $\frac{1}{2} m\bar{v}^2 = mg \frac{RH}{R+H}$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}$$

Neemt men $H = 1000$ km, dan wordt

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0098 \cdot 6350 \cdot 1000}{6350 + 1000}} \approx 4{,}1 \frac{\text{km}}{\text{sec}} .$$

Daarna volgt een vrije vlucht, waarbij de motor niet werkt, totdat de raket zijn baan heeft bereikt. Vervolgens zet men de motor weer aan totdat hij de snelheid v heeft bereikt, welke gegeven is door de formule

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m \frac{gR^2}{R+H}, \quad v = R \sqrt{\frac{g}{R+H}}$$

Neemt men weer $H = 1000$ km, dan wordt

$$v = 6350 \sqrt{\frac{0{,}0098}{6350 + 1000}} = 7{,}3 \frac{\text{km}}{\text{sec}} .$$

Schiet men een raket op deze wijze af dan kost dat minder energie dan wanneer men het op een andere wijze doet (denk b.v. aan de dikte der luchtlaag, die een raket moet doorklieven, indien hij onder een scherpe hoek met het aardoppervlak wordt afgeschoten). De kromme, welke de raket beschrijft heet de „synergische kromme van Oberth".

De snelheid v, welke een raket krijgt als al zijn brandstof verbruikt is wordt gegeven door $v = \frac{c}{0{,}4343} \log \frac{M_0}{M}$ (hierin is c de snelheid, waarmee de gassen de verbrandingskamer verlaten. M_0 is de massa van de gehele raket. M is de massa als de brandstof verdwenen is).

Dit is de formule, welke men in het Westen naar prof. Oberth noemt (een nog in leven zijnde vooraanstaande Duitse raketspecialist) en welke men in Rusland noemt naar Tsiolkowsky (1875—1935), een der pioniers van de raketkunde.

c is van de orde van 2—4 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Neemt men $c = 2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ en $v = 11{,}2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ dan moet $\frac{M_0}{M} = 250$, d.w.z. $M = \frac{1}{250} M_0$. Dus $\frac{249}{250}$, dit is meer dan 99% van de totale massa, moet uit brandstof bestaan. Om hieraan te ontkomen neemt men een meertrapsraket. Zodra de eerste trap is uitgebrand wordt hij afgeworpen. De veel lichter geworden restraket kan dan met de rest der brandstof een veel grotere snelheid bereiken. Net zo doet men met de tweede trap als deze uitgebrand is. Voor een drietrapsraket geldt

$$v = \frac{c}{0{,}4343} \log \frac{M_0'}{M'} \cdot \frac{M_0''}{M''} \cdot \frac{M_0'''}{M'''}$$

Hierin is b.v. M''_0 de massa van de tweede en derde trap. M'' is de massa van de tweede en derde trap verminderd met de brandstof der tweede trap.

Men kan hier zelf ook wel enkele vraagstukken over bedenken. Een vraagstuk, dat ik op een proefwerk heb gegeven luidde:

Op een raket, welke een massa van 3000 kg heeft werkt een stuwkracht van 9000 kgf. Bereken na hoeveel seconden vanaf de start een hoogte van 6 km is bereikt. Bereken tevens de snelheid welke de raket dan heeft. $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

In de les kan men dan nog enkele begripsvragen stellen als: welke invloed heeft de luchtweerstand, de vermindering van massa tijdens de vlucht etc.

De afleiding van de formule van Oberth-Tsiolkowsky is m.i. te lastig voor de Middelbare school. Voor collega's, die er belang in stellen laat ik hem hier volgen.

De raket start met een totale massa M_0. We stellen dat de brandstof gelijkmatig opbrandt; per sec een massa m. De uitstroomsnelheid zij weer aangegeven door c. Ten tijde t is dus de massa der raket $M = M_0 - mt$ (1). De snelheid zal dan v zijn, zodat de impuls gelijk is aan $v(M_0 - mt)$ (2). Na een tijd dt is de massa van het uitgestoten gas mdt; deze massa is dus uitgestoten met een snelheid c t.o.v. de verbrandingskamer, dus met een snelheid $v - c$ t.o.v.

een assenstelsel, waarin men de beweging van de raket volgt. De impuls van het uitgestoten gas is dan $(v - c)\ m\mathrm{d}t$ (3).

De snelheid der raket is hierdoor toegenomen met $\mathrm{d}v$. De overgebleven massa der raket is $M_0 - mt - m\mathrm{d}t$, zodat haar impuls gelijk is aan $(M_0 - mt - m\mathrm{d}t)\ (v + \mathrm{d}v)$ (4).

Veronderstellend dat op de raket geen uitwendige krachten werken moet de impuls van het geheel, raket en uitgestoten gas, niet veranderen. Uit (2), (3) en (4) volgt derhalve

$$v\ (M_0 - mt) = (v - c)\ m\mathrm{d}t + (M_0 - mt - m\mathrm{d}t)\ (v + \mathrm{d}v).$$

Indien men dit uitwerkt en de term $m\mathrm{d}t\mathrm{d}v$, welke klein is van de tweede orde, verwaarloost krijgt men $(M_0 - mt)\ \mathrm{d}v = cm\mathrm{d}t$. Om dit op te lossen delen we beide leden van deze vergelijking door

$M_0 - mt$: $\mathrm{d}v = \dfrac{cm}{M_0 - mt}\,\mathrm{d}t$

Integratie geeft

$$v = -\ c\lg\ (M_0 - mt) + K.$$

De integratieconstante K wordt bepaald door de beginvoorwaarden $t = 0,\ v = 0$.

Dus $0 = -c\lg M_0 + K$; hieruit volgt $K = c\lg M_0$, zodat de oplossing wordt $v = c\lg \dfrac{M_0}{M}$ volgens (1).

Zodra de brandstof is verbruikt krijgen M en v de eindwaarde. M is dan de massa van de raket verminderd met de massa der brandstof. $\dfrac{M_0}{M}$ heet de massaverhouding.

Men kan deze formule toepassen op de verschillende trappen der raket.

Voor de eerste trap geldt $v_1 = c\lg \dfrac{M_0}{M'}$, M' = de massa van de gehele raket verminderd met de brandstof der eerste trap. Voor de tweede trap geldt $v_2 = c\lg \dfrac{M''_0}{M''}$, M''_0 = de massa der 2e ,3e, ...ne trap. M'' = de massa der 2e, 3e, ...ne trap verminderd met de brandstof der 2e trap. Volgens de traagheidswet geldt nu voor de eindsnelheid

$$v = \sum v_i = c \sum \lg \frac{M_0}{M} = c\lg \Pi \frac{M_0}{M}$$

Zoals uit de afleiding blijkt geldt de formule van Oberth-Tsiolkowsky alleen voor een krachtenvrij veld. Neemt men de zwaarte-

kracht der aarde in rekening dan zal de snelheid kleiner zijn dan door de formule wordt gesuggereerd.

Volgens de formule $\vec{K} = - \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ zal dan de impulsverandering

$$\mathrm{d}p = (M_0 - mt)\,\mathrm{d}v - cm\mathrm{d}t$$

gelijk moeten zijn aan $-K\mathrm{d}t$ waarin $K = M \,.\, g(H) = Mg \frac{R^2}{(R + \int_0^t v\mathrm{d}t)^2}$ zodat de vergelijking wordt

$$(M_0 - mt) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - cm + (M_0 - mt)g \frac{R^2}{(R + \int_0^t v\mathrm{d}t)^2} = 0$$

Of deze vergelijking een formele oplossing bezit is mij niet bekend. Persoonlijk ben ik niet in staat de vergelijking op te lossen. In elk geval kan men dit met behulp van een rekenmachine doen voor bepaalde waarden van de constanten, die in de vergelijking voorkomen.

INGEKOMEN BOEKEN

Van Thijn's Wiskundige Leergang:

I. Abram: *Leerboek der Goniometrie*, met vraagstukken, 26ste druk. Prijs ing. *f* 2,90, geb. *f* 3,60.

I. Abram: *Leerboek der Stereometrie*, 21e druk. Prijs ing. *f* 3,90, geb. *f* 4,75.

I. Abram: *Leerboek der Vlakke Meetkunde*, met opgaven, deel I, 24e druk. Prijs ing. *f* 3,25, geb. *f* 3,90. Met de voorstellen van de nomenclatuurcommissie is rekening gehouden. J. B. Wolters, Groningen.

Dr. P. Bronkhorst, Dr. Ir. B. Groeneveld: *Stereometrie* voor het V.H.M.O., 2e druk. Prijs *f* 1,90. 59 blz. J. B. Wolters, Groningen.

Enkele vraagstukken zijn toegevoegd en veranderd, de benamingen zijn in overeenstemming gebracht met het rapport van de nomenclatuurcommissie.

Dr. W. A. M. Burgers, *Planimetrische Vraagstukken*, voor de hoogste klassen V.H.M.O.; 2e druk. Prijs *f* 1,10, 32 blz. J. B. Wolters, Groningen.
Enkele wijzigingen zijn aangebracht.

Dr. P. G. J. Vredenduin: *Planimetrie*, deel 3, 3e druk, Prijs ing. *f* 2,25, geb. *f* 2,75 J. B. Wolters, Groningen.

WISKUNDIG INGENIEUR:

een steeds meer gezochte studierichting aan de T. H. te Delft [1])

„Hoewel er tot nu toe nog slechts twee diploma's van wiskundig ingenieur aan de technische hogeschool te Delft zijn uitgereikt, neemt de belangstelling voor deze opleiding elk jaar toe. Dit blijkt wel uit het feit, dat op het ogenblik 81 jonge mensen in Delft voor wiskundig ingenieur studeren. Ongeveer 50 van hen hebben het kandidaats bereids achter de rug en 6 hebben het eerste deel van het ingenieursexamen met goed gevolg afgelegd.

De opleiding tot wiskundig ingenieur dateert van 1 september 1955, maar alleen degenen, die over een zeer behoorlijke wiskundige aanleg beschikken, zullen haar met succes kunnen volgen. De studie, die officieel vijf jaar duurt, is namelijk vrij zwaar, niettegenstaande er geen laboratoriumwerk aan te pas komt.

De perspectieven voor wiskundige ingenieurs zijn vele; behalve in industriële ondernemingen, waar zij langs mathematische weg problemen kunnen gaan oplossen, welke de industrie stelt, staan voor hen betrekkingen open op het gebied van het zuiver- en toegepast wetenschappelijk onderzoek en met de aantekening „didactiek" op hun diploma kunnen zij onder andere bij het middelbaar en hoger technisch onderwijs te werk worden gesteld."

Met deze woorden vingen prof. dr. ir. L. Kosten, prof. dr. L. Kuipers en prof. dr. R. Timman — hoogleraren in de wiskunde aan de technische hogeschool te Delft — het onderhoud aan, dat zij het A.N.P. toestonden over de opleiding tot wiskundig ingenieur aan deze instelling voor hoger onderwijs.

De onderafdeling wiskunde, zo vervolgden zij, ressorteert in Delft van oudsher onder de algemene wetenschappen, waaronder ook de niet-technische vakken zoals bijvoorbeeld de bedrijfseconomie, de bedrijfspsychologie, de economie en het recht vallen. Dat de afdeling wiskunde onder de algemene wetenschappen wordt gerangschikt, geschiedt vanwege haar sterk dienstverlenend karakter. De wiskunde toch, is voor bijna alle vakken, welke in Delft gedoceerd worden, een steeds onmisbare hulpwetenschap geweest. Vandaar dat iedere student, die in Delft aankomt, verplicht is twee jaar lang een wiskundige propaedeuse te volgen met uitzondering van de bouwkundigen, die slechts één jaar college in de wiskunde behoeven te volgen. Nu heeft de wiskunde zich de laatste jaren in Delft meer en meer tot een zelfstandige wetenschap ontwikkeld, waardoor deze afdeling een kleine vijf jaar geleden begonnen is met de opleiding

[1]) Overgenomen uit O.K.W.-Mededelingen, 24e jaargang, nr. 20, 21-5-1960.

van wiskundige ingenieurs. Haar taak is dus op het ogenblik een tweevoudige: primo het geven van wiskunde-onderwijs aan de aanstaande ingenieurs van alle studierichtingen en secundo de eigenlijke opleiding tot wiskundig ingenieur. De wiskundige propaedeuse is van zeer groot belang, want in alle technische afdelingen is een ware honger naar wiskundige kennis, aangepast aan de behoeften van de desbetreffende afdeling. Verschillende afdelingen hebben bovendien een sectie voor wetenschappelijk speurwerk en degenen, die daar werken, hebben grote behoefte aan toegepaste wiskunde, welke hen onder meer in staat stelt, vraagstukken analytisch, statistisch of bijvoorbeeld met behulp van de methoden der „operations research" te behandelen.

Om de eerste- en tweedejaarsstudenten de wiskundige propaedeuse wat te vergemakkelijken, stelt men hen in staat twee middagen per week een college te volgen, waarop zij allerlei vragen kunnen stellen en wiskundige problemen een oplossing vinden. Deze colleges worden gegeven door wetenschappelijke ambtenaren, zogenaamde instructeurs, wier aantal niet minder dan 24 bedraagt. Deze instructeurs, die onder leiding van een chef-instructeur werken, helpen de jonge studenten bij het overbruggen van de kloof tussen de middelbare school met haar klassikaal karakter en het vrije studeren aan de technische hogeschool met haar 70 vakken per studierichting.

Wat nu de opleiding tot wiskundig ingenieur betreft, deze sluit aan bij een propaedeutisch examen van civiel-, geodetisch-, werktuigkundig-, elektrotechnisch, natuurkundig-, scheepsbouwkundig- of vliegtuigbouwkundig ingenieur. Zij, die het propaedeutisch examen voor scheikundig ingenieur of het eerste gedeelte van het kandidaatsexamen voor mijningenieur met gunstig gevolg hebben afgelegd, behoren daarbij een aanvullend examen in de wiskunde te doen. Een voorwaarde bij de opleiding van wiskundig ingenieur is namelijk dat de student tegen een bepaalde (technische) afdeling moet kunnen „aanleunen". Wanneer dus bijvoorbeeld studenten van de afdeling werktuigbouwkunde of van die der elektrotechniek na hun propaedeutisch examen besluiten om voor wiskundig ingenieur door te gaan, dan dienen zij naast de 8 à 9 uur wiskunde per week in het derde jaar, zich 6 uur aan de technische keuzevakken uit hun oorspronkelijke richting te wijden. Komt iemand in Delft aan met het uitgesproken verlangen om direct voor wiskundig ingenieur te worden opgeleid, dan adviseert men zo iemand meestal om de propaedeuse der technische natuurkunde te volgen.

De bedoeling van deze opzet is, om de wiskundige ingenieurs op de hoogte te brengen van technische problemen, waardoor zij later

niet alleen in staat zullen zijn daarover met hun research-collega's van gedachten te wisselen, doch ook de capaciteit zullen hebben de bedoelde vraagstukken mathematisch te formuleren, hetgeen altijd een zeer moeilijke opgave is. De wiskunde, die in het derde jaar gedoceerd wordt, draagt aanvankelijk nog een propaedeutisch karakter, hoewel zij veel dieper gaat dan in het eerste en tweede jaar. Het duurt dan evenwel niet lang of de student wordt met de „echte" wiskunde geconfronteerd, hetgeen ook in het vierde jaar het geval is. Bovendien moeten in het derde jaar 120 uren aan een practicum worden besteed, wat het werken met tafelrekenmachines vereist. De technische hogeschool wil de aanstaande wiskundige ingenieurs namelijk wennen aan het berekenen van uitkomsten tot in de laatste onderdelen, omdat dit later in de praktijk van hen gevraagd zal worden. Voorts leren de derdejaars nog het opstellen van programma's voor elektrotechnische rekenmachines. Na het derde jaar kan het kandidaatsexamen worden afgelegd.

Het vierde jaar, dat een consequente voortzetting van het derde is, kan beschouwd worden als het begin van de eigenlijke ingenieursstudie. De studenten, die dan het programmeren hebben geleerd, gaan nu zelfstandig met de rekenmachine werken en men laat hen eigen onderzoekingen verrichten, al dan niet gecombineerd met een literatuurstudie. Het eerste deel van het dan volgend ingenieursexamen vertoont een differentiatie, dat wil zeggen: òf het accent wordt op de fysische eigenschappen der materie gelegd of de organisatorische kant der problemen wordt benadrukt.

Het vijfde en laatste jaar, waarin slechts enkele colleges worden gelopen, is hoofdzakelijk gewijd aan het zelfstandig verrichten van allerlei onderzoekingen, groter dan die van het vierde jaar, doch minder omvangrijk dan het werk, waarvoor een promotie iemand stelt. Dit vijfde jaar, aldus de hoogleraren, is speciaal bedoeld om de zelfstandigheid van de aanstaande wiskundige ingenieur te stimuleren, welke eigenlijk al in het vierde jaar begint te groeien, omdat dan bijna allen praktisch beginnen te werken.

Parallel aan deze opleiding vindt men in het gebouw der technische hogeschool het instituut voor toegepaste wiskunde, waar mathematische problemen van andere afdelingen en incidenteel van de industrie worden bewerkt. Aan dit instituut is een groot aantal medewerkers verbonden van verschillende wetenschappelijke variëteit. Deze medewerkers zijn voor een deel belast met onderwijstaken en voor een ander deel met het bewerken van de voorkomende problemen. In dit instituut bevindt zich ook de zogenaamde zebra (de zeer eenvoudige binaire rekenautomaat).

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

XLVI *Een ellips met twee gelijke assen is een cirkel.*

Deze weinig verrassende uitspraak wordt hier niet herhaald om haar inhoud, maar ter wille van een zekere onrust die een bijkomstigheid ervan bij nadenkende naturen kan opwekken en die een periodiek binnenkomend verzoek om nadere inlichtingen tot gevolg heeft. Hoe is het mogelijk, vraagt men zich af, dat één nader „gegeven", nl. de gelijkheid van twee lijnstukken, veroorzaakt dat de verzameling van alle ellipsen, die ∞^5 exemplaren bevat, inéénschrompelt tot die der ∞^3 cirkels? Of om het wat meer analytisch te formuleren: de vergelijking van een kegelsnede bevat vijf wezenlijke parameters; die aslengten $2a$ en $2b$ hangen daarvan op een bepaalde wijze af; de enkele vergelijking $a = b$ heeft tot consequentie dat één der coëfficiënten nul is en dat bovendien nog twee andere gelijk zijn. Dat gaat toch verder dan men verwachten zou.

In de ruimte is het nog wat erger. De vergelijking van een kwadratisch oppervlak heeft negen wezenlijke coëfficiënten. De drie assen $2a$, $2b$ en $2c$ zijn functies van deze grootheden. De twee voorwaarden $a = b$ en $b = c$ brengen te weeg dat de drie coëfficiënten der gemengde termen alle nul worden en de drie der zuiver kwadratische termen onderling gelijk. Twee oorzaken, vijf gevolgen. De dimensie van de ruimte der betrokken figuren valt door twee vergelijkingen van negen op vier terug.

De paradox wordt snel opgehelderd als men beseft dat het bovenstaande stilzwijgend uitgaat van de beperking tot reële figuren of althans figuren met reële vergelijking. Men moet met de uitdrukking „aantal gegevens" altijd al voorzichtig zijn, maar in het reële gebied is het ontstaan van misverstanden wel heel gemakkelijk. Hoeveel gegevens zijn nodig om twee punten in het platte vlak, b.v. het hoogtepunt en het zwaartepunt van een driehoek, te doen samenvallen?

Twee zegt de een, die geleerd heeft dat de plaats van een punt door

twee coördinaten wordt bepaald; één biedt een ander, overtuigd dat twee punten samen vallen als hun afstand nul is. Beide hebben gelijk, maar de laatste toch in iets mindere mate als hij zich niet goed bewust ervan is zich tot reële figuren te beperken; hij is dan ook voorbeschikt om moeite te hebben met een der aardigste van Stäckel afkomstige, drogredenen uit de elementaire meetkunde, die op dit thema gebouwd is.

Van driehoeken door twee gegevens bepaald is hier vroeger wel sprake geweest (Verscheidenheden XXXIV, Euclides 29 (1954), 242—243). Zijn a, b en c de zijden dan volgen uit de éne vergelijking $(4a - 3b)^2 + (5b - 4c)^2 + (3c - 5a)^2 = 0$ de twee betrekkingen $a : b : c = 3 : 4 : 5$, omdat men niet-reële getallen uitsluit. Van overeenkomstige aard is het vraagstuk dat ons thans vervult.

Over aslengten van een kegelsnede kan men alleen spreken als deze een middelpunt heeft. Neemt men dit als oorsprong, dan luidt de vergelijking

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \tag{1}$$

De kwadraten van de assen zijn omgekeerd evenredig met de wortels van

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

en zij zijn dus alleen aan elkaar gelijk als de discriminant van (2) gelijk nul is:

$$(a - c)^2 + 4b^2 = 0 \tag{3}$$

Voor reële a, b en c heeft dit $a = c$, $b = 0$ tot consequentie; de kegelsnede is dus een cirkel. De aangelegenheid hangt blijkbaar ook hier mee samen dat de discriminant nooit negatief kan zijn (of de wortels van (2) altijd reëel) en men haar voor ons doel de minimumwaarde voorschrijft.

Voor meer dimensies kunnen wij het bewijs beter anders redigeren. Wij nemen maar dadelijk het algemene geval.

Zij $\sum_1^n a_{ij}x_ix_j = 1$ de kwadratische vergelijking dan zijn de kwadraten van de assen der variëteit omgekeerd evenredig met de wortels λ_i van

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Veronderstellen wij nu de gelijkheid der assen, dan gelden de $(n-1)$ vergelijkingen $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, maar omdat de wortels reëel zijn kan men ook wel samentrekken tot één voorwaarde

$$\sum (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0 \qquad (5)$$

waaruit volgt

$$(n-1) \sum \lambda_i^2 - 2 \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = 0$$

of

$$(n-1)[\sum \lambda_i]^2 - 2n \sum \lambda_i \lambda_j = 0 \qquad (6)$$

Nu is volgens (4)

$$\sum \lambda_i = \sum a_{ii} \text{ en } \sum \lambda_i \lambda_j = \sum (a_{ii} a_{jj} - a^2{}_{ij})$$

zodat uit (6) volgt

$$(n-1)[\sum a_{ii}]^2 - 2n \sum a_{ii} a_{jj} + 2n \sum a^2{}_{ij} = 0$$

of

$$\sum (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2n \sum a^2{}_{ij} = 0$$

zodat wegens de realiteit der coëfficiënten inderdaad noodzakelijk is:

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}, \; a_{ij} = 0 \; (i \neq j) \qquad (7)$$

Hoe weinig zin aan het begrip „aantal voorwaarden" toekomt blijkt wel hieruit: aanvankelijk waren het $(n-1)$, daarna één enkele, tenslotte $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$.

Laat men kegelsneden met imaginaire vergelijking toe dan kan men er wel één vinden die geen cirkel is en waarvoor de wortels der λ-vergelijking gelijk zijn. Uit (3) volgt dan nl.

$$ax^2 + i(a-c)xy + cy^2 = 1$$

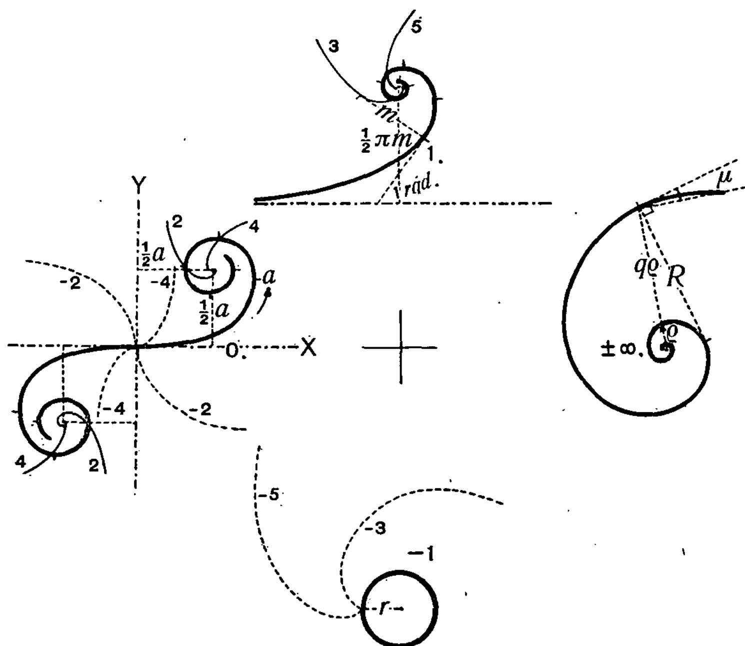
met $a \neq c$, die nog vier of twee reële punten bevatten kan. Zij gaat niet, zoals de cirkel door de beide isotrope punten, maar door één ervan: $(1, i, 0)$. Van de assen komt niet veel terecht, ze vallen samen langs $y = ix$, die tevens een asymptoot is.

VERWANTSCHAP VAN DE SPIRAAL VAN CORNU, DE SICISPIRAAL, DE LOGARITMISCHE SPIRAAL EN DE CIRKEL

door

J. C. G. NOTTROT, Kol. d. Genie b.d.
's-Gravenhage

Bovengenoemde vier curven ziet men niet dikwijls in onderling verband gebracht. In de hier bijgaande schets zijn ze in dikke lijn getekend (resp. links, boven, rechts en onder). Voor de eerstgenoemde drie curven volgt hierna een beknopte toelichting.



De Spiraal van Cornu.

Deze dubbele spiraal draagt de naam van de Franse natuurkundige (1841—1902), die haar in de Wetenschap invoerde en in de Optica toepaste. Een andere naam, *Klothoide,* werd haar gegeven door de Italiaanse wiskundige Cesàro (1859—1906), de grondlegger van de Natuurlijke Meetkunde.

De spiraal van Cornu is centraal symmetrisch, het midden is dus een buigpunt. Naar weerszijden windt de curve zich in oneindige lengte om een asymptotisch punt. De raaklijn in het buigpunt wordt tot X-as genomen.

Het is eenvoudig te zeggen hoe men deze curve kan vormen. Een helft ervan verkrijgt men bijvoorbeeld door een meetband zo te leggen, dat elk getal, elke afstandsmaat op die meetband, tevens naar verhouding een maat is voor de kromming van de band ter plaatse. In het beginpunt van die helft, het buigpunt, is de kromming dus nul en de kromtestraal dus oneindig.

Als men bij de plaats waar de meetband vanaf het beginpunt over een rechte hoek is afgebogen een afstand a afleest, zal men bij de verderop gelegen plaatsen waar die richting telkens nogmaals over een rechte hoek is gedraaid, achtereenvolgens de afstanden $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$, enz. aflezen. Genoemde plaatsen zijn dus de meest rechtse, en linkse, en de hoogste en laagste punten van de spiraalwindingen.

Op de plaats van het eerste meest rechts gelegen punt, dus het punt op afstand a van het buigpunt, is de kromtestraal $\frac{a}{\pi}$ en de kromming dus $\frac{\pi}{a}$. Daar aangenomen werd dat de kromming evenredig is aan de afstand tot het beginpunt, is de kromming ter plaatse van de verdere meest hoog, links, laag en rechts gelegen punten der windingen dan $\frac{\pi}{a}\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{a}\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{a}\sqrt{4}$, $\frac{\pi}{a}\sqrt{5}$, enz.

De twee asymptotische punten liggen op afstand $\frac{1}{2}a$ van X- en Y-as.

Een vermeldenswaardige eigenschap van de spiraal van Cornu is deze, dat het zwaartepunt van de curveboog vanaf het buigpunt tot een punt P, op kromtestraal-afstand recht onder het kromtemiddelpunt van P gelegen is. Hieruit volgt, dat de punten op de afstanden $2a$, $2a\sqrt{2}$, $2a\sqrt{3}$, enz. dus de laagste punten der windingen, tevens het zwaartepunt zijn van de tot hen reikende boog.

Als bij een met gelijkmatige snelheid rijdende auto het stuurwiel met constante snelheid wordt gedraaid, dan rijdt die auto aanvankelijk bij benadering een spiraal van Cornu.

Laat men langs het gehele beloop van een spiraal van Cornu de kromming overal eenzelfde bedrag toe- of afnemen, dan blijft de totale curve aan zichzelf gelijk. Deze eigenschap vindt toepassing bij thermometers die berusten op de uitzetting en kromming van een bimetalen spiraal in de vorm van een spiraal van Cornu.

De spiraal van Cornu is de ideale overgangsboog tussen een recht en een cirkelboogvormig gedeelte van een spoorbaan, autoweg of renbaan. Zo zijn er bijvoorbeeld in de nieuwe 1800 meter lange autobeproevingsbaan van de Volkswagenfabriek te Wolfsburg vier van zulke overgangsbogen, elk van 180 à 200 meter.

De Sicispiraal.

Deze curve, die o.a. toepassing vindt in de Theoretische Natuurkunde, is afkomstig van N. Nielsen („Theorie des Integrallogarithmus", 1906); haar naam werd ontleend aan de symbolen Si en Ci voor de integraalsinus en -cosinus in de Cartesische coördinaten van de curve.

In vorm gelijkt zij enigszins op de hyperbolische spiraal, zij heeft ook één asymptoot en windt zich eveneens in oneindige lengte om een asymptotisch punt.

Ook voor de Sicispiraal is eenvoudig aan te geven hoe men haar kan vormen. In plaats van de gewone meetband, die wij namen voor het vormen van de spiraal van Cornu, nemen wij nu de uiterst buigzaam gedachte schuif van een rekenliniaal. Deze draagt een logaritmische schaal. Wij buigen deze schaal nu wederom zo, dat elk schaalgetal weer naar verhouding een maat is voor de kromming ter plaatse.

Tevens verkrijgen wij hiermede dat dan elk schaalgetal naar verhouding ook de afbuiging der curve (van de asymptoot af gerekend) aangeeft. Hebben wij de logaritmische schaal bijvoorbeeld zo gebogen, dat bij het meest rechtse punt der spiraal het schaalgetal 90 komt, dan zal het hoogste punt het schaalgetal 180 hebben, het meest linkse punt het schaalgetal 270, enz. De afbuiging is dan in graden aangegeven. Komt bij het meest rechtse punt de schaalwaarde $\frac{1}{2}\pi$, dan ligt het hoogste punt bij de schaalwaarde π, het meest linkse punt bij $1\frac{1}{2}\pi$, enz., en is de afbuiging in radialen uitgedrukt.

In laatstbedoeld geval is bij het schaalgetal 1 de afbuiging 1 radiaal. Wanneer de lengte van de kromtestraal in dat punt m wordt gesteld, ligt het asymptotisch punt op een afstand $\frac{1}{2}\pi m$ van de asymptoot.

De Logaritmische Spiraal.

Hoewel deze spiraal aan alle wiskundigen goed bekend is, wil ik er hier toch nog het een en ander van zeggen.

De „ontdekking" der logaritmische spiraal wordt toegeschreven aan Evangelista Torricelli (1608—1647), leerling van Galileï en

uitvinder o.a. van de barometer. Haar naam ontving ze van Varignon (1654—1722). Onder meer maakten Descartes, Jacob Bernoulli en Römer veel studie van deze curve.

Schelpen en slakkenhuizen vertonen vaak een bouw of patroon volgens een logaritmische spiraal, zo bijvoorbeeld de ammonieten in oude geologische formaties.

Als een punt, om een pool spiralend, onder een constante vlucht-hoek tot deze pool nadert of er zich van verwijdert, dan beschrijft het een logaritmische spiraal. Zo wordt wel beweerd dat insekten, wanneer zij al dichter en dichter om een lamp vliegen, daarbij een logaritmische spiraal volgen, omdat het licht alsdan uit constante richting in hun facetogen valt, hetgeen zij ook gewend zijn wanneer zij in rechte lijn vliegen in het zonlicht.

Een logaritmische spiraal wordt ook verkregen, wanneer een regelmatige schaal, — weer een meetband bijvoorbeeld —, zó wordt gebogen, dat elk schaalgetal de lengte van de kromtestraal ter plaatse aangeeft.

Hoewel de logaritmische spiraal binnenwaarts in een oneindig aantal windingen de pool asymptotisch nadert, is voor elk punt van de spiraal de curvelengte tot de pool een eindige afstand.

Een logaritmische spiraal heeft twee haar vorm bepalende constante grootheden, die onderling afhankelijk zijn. Dit zijn de vluchthoek μ en de verwijdingsfactor q. De vluchthoek μ is de hoek tussen de raaklijn in een curvepunt en de loodlijn op de voerstraal, de factor q is de lengteverhouding van de samenvallende voerstralen naar twee opeenvolgende windingen of, — wat daaraan gelijk is —, de verhouding van de betrokken strookbreedten. De factor q is altijd groter dan 1. De grootheden μ en q zijn verbonden door de betrekking

$$\ln q = 2\pi \operatorname{tg} \mu$$

De logaritmische spiraal is slechts in geringe mate aan andere curven geliëerd, zij is een zeer zelfgenoegzame curve. Jacob Bernoulli gaf haar tot lijfspreuk: „Eadem mutatis resurgo" (vrij vertaald: „Hoe ook veranderd, ik blijf mijzelf") en maakte deze woorden ook tot zijn persoonlijk devies.

Zo is bijvoorbeeld de evolute (ontwondene) van een logaritmische spiraal een volkomen gelijke logaritmische spiraal. In het algemeen zal deze niet samenvallen met de oorspronkelijke curve. Dit is slechts het geval voor bepaalde waarden van μ, en dus ook van q, bijvoorbeeld voor $\mu = 15° \; 20' \; 41''$ of $q = 5{,}6078$, voor welke waarden de logaritmische spiraal in de figuur is geschetst. Deze is dus een auto-evolute.

De vergelijkingen.

De Cartesische coördinaten van de spiraal van Cornu kunnen slechts worden uitgedrukt in Fresnelse integralen, die van de Sicispiraal alleen maar in integraalsinus en -cosinus. Deze functiewaarden kan men ontlenen aan tabellen (b.v. die van Jahnke-Emde). De logaritmische spiraal kan door een eenvoudige vergelijking in poolcoördinaten worden voorgesteld. Maar alle vier de curven zijn voorstelbaar in natuurlijke vergelijkingen, d.w.z. met de coördinaten R en s, de kromtestraal en de booglengte.

Deze vergelijkingen zijn:

Spiraal van Cornu	$Rs = \frac{a^2}{\pi}$
Sicispiraal	$\ln \frac{R}{m} = -\frac{s}{m}$
Logaritmische Spiraal	$R = s \operatorname{tg} \mu$
Cirkel	$R = r$

In de eerste vergelijking wordt s gemeten vanaf het buigpunt en is a de booglengte tot aan een afbuiging van 90°.

In de tweede vergelijking is m de kromtestraal voor het punt, waar — vanaf de asymptoot — de afbuiging 1 radiaal is, en wordt s vanaf dit punt gemeten.

In de derde vergelijking is μ de constante vluchthoek en wordt s gemeten vanaf het asymptotisch punt (de pool).

In de vierde vergelijking is r de straal van de cirkel.

Evoluten en involuten.

Ten aanzien van de logaritmische spiraal werd reeds opgemerkt, dat haar evolute geheel gelijk is aan de oorspronkelijke logaritmische spiraal. Hieruit volgt dat alle opeenvolgende evoluten en involuten (= evolventen of ontwindenden) geheel gelijk zijn aan de oorspronkelijke logaritmische spiraal.

De natuurlijke vergelijking van de spiraal van Cornu kan geschreven worden als $R = cs^{-1}$, waarin c een vrij te kiezen coëfficiënt is, die niet de vorm, doch slechts de grootte bepaalt. Leiden wij nu af door welke natuurlijke vergelijkingen de opeenvolgende evoluten en involuten van de spiraal van Cornu worden weergegeven [1]), dan vinden wij overeenkomstige formules, resp. met bij s de exponenten: $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, enz. voor de 1e, 2e, 3e, enz. evolute en de exponenten:

[1]) Zijn R en s de coördinaten van de curve en R_1 en s_1 die der evolute, dan is in 't algemeen $\frac{dR}{ds} = \frac{R_1}{s_1}$ en $R = s_1$.

$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, enz. voor de 1e, 2e, 3e, enz. involute (hierbij s resp. vanaf de asymptotische punten en vanaf het buigpunt gemeten).

Voor de opeenvolgende evoluten van de Sicispiraal (maar niet voor haar involuten!) zijn de natuurlijke vergelijkingen eveneens van de bedoelde vorm, met bij s de exponenten: $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, enz. voor de 1e, 2e, 3e, enz. evolute (hierbij s vanaf het asymptotisch punt gemeten).

Voor de cirkelinvoluten ten slotte, zijn in de natuurlijke vergelijkingen van dezelfde vorm de exponenten bij s achtereenvolgens: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, enz. (hierbij s vanaf het op de cirkel gelegen beginpunt gemeten). De 1e en 2e involute van de cirkel worden gewoonlijk „de evolvente" en „de 2e evolvente" genoemd.

De verwantschap.

Door de curven te rangschikken naar de grootte van hun exponent, verkrijgen wij bijgaande tabel. De exponenten zijn daarin een functie $\frac{n+1}{n-1}$ van het positieve of negatieve rangnummer n.

n	curve	exponent van s
0	*Spiraal van Cornu*	—1
1	*Sicispiraal*	$(\mp\infty)$
2	1e evolute v. Spir. v. Cornu	3
3	1e evolute v. Sicispir.	2
4	2e evolute v. Spir. v. Cornu	$\frac{5}{3}$
5	2e evolute v. Sicispir.	$\frac{3}{2}$
...	....	...
...	....	...
$\pm\infty$	*Logaritmische Spiraal*	1
...	....	...
...	....	...
—5	2e involute v. Cirkel	$\frac{2}{3}$
—4	2e involute v. Spir. v. Cornu	$\frac{3}{5}$
—3	1e involute v. Cirkel	$\frac{1}{2}$
—2	1e involute v. Spir. v. Cornu	$\frac{1}{3}$
—1	*Cirkel*	0
0	*Spiraal van Cornu*	—1

In deze tabel hebben ook de Sicispiraal en de cirkel zelf, alsmede de logaritmische spiraal hun plaats. De logaritmische spiraal blijkt de limiet te zijn van de van weerskanten uit de spiraal van Cornu, alsmede de Sicispiraal en de cirkel ontsproten reeksen curven.

Over de voor $n = 1$ resulterende waarde $\mp\infty$ voor de exponent van s bij de Sicispiraal, kan het volgende worden gezegd: Een logaritmische schaal kan worden beschouwd als een schaal voor een macht met exponent limiet nul. Zij is langs de Sicispiraal de schaal voor de kromming R. Dus symbolisch is de functie $s = f_1(R)$ voor te stellen als $s = c_1 R^0$. Omgekeerd is dan de functie $R = f_2(s)$ symbolisch als $R = c_2 s^\infty$ voor te stellen.

In de figuur zijn de in de tabel opgenomen curven geschetst en is de waarde van n daarbij vermeld.

BOEKBESPREKING

Dr. W. A. Burgers, *Stereometrische vraagstukken* voor de hoogste klassen V.H.M.O. J. B. Wolters/Groningen; wit doorschoten totaal 32 blz. *f* 1,10.

Evenals de planimetrische vraagstukken van dezelfde schrijver ziet ook dit boeksken er keurig verzorgd uit. Bij het doornemen merkt men al ras, dat het rijk is van inhoud. Om de liefde tot het vak aan te wakkeren heeft de schrijver op een zeer praktische wijze het constructieve element op de voorgrond geplaatst. Vanwege zijn grote overzichtelijkheid zal het bij docenten en leerlingen, die er zo heerlijk in kunnen grasduinen, zeer in de smaak vallen.

Okken

Dr. J. Bijl, dr. D. Kijne en W. J. H. Salet, *Basis voor de analytische meetkunde;* Uitgever: J. M. Meulenhoff, Amsterdam, 1959, 120 blz., prijs *f* 4.50.

De auteurs, werkzaam aan de T.H. te Delft introduceren met dit boek een consequent toepassen van vaste vectoren (althans bij de behandeling van de rechte lijn) in de analytische meetkunde.

Reeds eerder was o.a. door de heer Vredenduin een bescheiden gebruik van vectoren gepropageerd. In de nieuwste druk van zijn leerboek der analytische meetkunde is deze hierop teruggekomen. Dit maakt het moeilijk te voorspellen of deze ,,basis" succes zal hebben, al zullen zeker degenen, die hun studie aan de T.H. gaan voortzetten, profijt trekken uit het feit, dat ze met deze behandelingswijze vertrouwd zijn geraakt.

,,Van het onbekende naar het bekende" zo zou ik de opbouw willen samenvatten. De vectorvoorstelling wordt n.l. voorop gesteld. Na 30 bladzijden wordt dan bewezen: $ax + by + c = 0$ is de vergelijking van een rechte. Een omgekeerde aanpak ware m.i. verkieslijker geweest.

Na de behandeling van de rechte lijn, die de helft van het boek beslaat, komen vectorvoorstellingen nog slechts sporadisch voor. Een groot aantal aardige vraagstukken siert het boek.

Enkele opmerkingen:

Het is jammer, dat noch op blz. 30 noch op blz. 58 de kans is aangegrepen duidelijk te maken, wat men feitelijk doet, als men uit twee vergelijkingen een parameter elimineert.

Bij de behandeling van de cirkel ontbreekt de machtstelling. Ook een meetkundige definitie van een cirkelbundel ontbreekt. Op blz. 64 lees ik: — Laten we de nulletjes weg ... We hebben dan x_0 en y_0 „lopende coördinaten" gemaakt.

Een vreemde manier, iets duidelijk te maken. Hoe dikwijls laten leerlingen uit wanhoop die nulletjes maar weg?

Burgers

J. M. Bocheński, *A Precis of Mathematical Logic*. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1959; 100 blz., geb. *f* 13,75.

Dit boek is verschenen als eerste uitgave in „Synthese Library, a series of monographs on recent development of symbolic logic, significs, sociology of language, sociology of science and of knowledge, statistics of language and related fields". Het is reeds in het Frans verschenen onder de titel „Précis de logique mathématique" en in het Duits onder de titel „Grundriss der Logistik".

De inhoud bestaat uit een korte weergave van verschillende methoden, die in de logistiek gevolgd worden. Men vindt er allereerst in een behandeling van de propositionele logica (logic of sentences) zowel met behulp van waarheidsfuncties als axiomatisch-deductief. Alleen de tweewaardige logica wordt ontwikkeld; in een aanhangsel wordt kort gewezen op het bestaan van andere systemen. Daarna komt de predikatenlogica aan de orde. De auteur begint met een op axioma's gegrondveste theorie van het syllogisme. In het nu volgende deel worden geen bewijzen meer gegeven, maar uitsluitend resultaten vermeld, die elke lezer „intuïtief" kan verifiëren. Achtereenvolgens passeren de logica van de monadische predikaten, de dyadische predikaten, de klassen de revue, waarbij nog apart de gelijkheidsrelatie en de descriptie (de betekenis van het bepaalde lidwoord) ter sprake gebracht worden. De lezer doet hier verstandig de laatste twee figuren op pag. 57 weg te laten; deze moeten door de auteur bij vergissing toegevoegd zijn. In het laatste hoofdstuk wordt de logica van de relaties besproken, waarbij in hoofdzaak de methode van Russell gevolgd wordt. Metalogische problemen komen in dit boek niet ter sprake.

De auteur is er op bewonderenswaardige wijze in geslaagd in een kort bestek de fundamenten van de logistiek uiteen te zetten. Zijn weergave is bijzonder helder, maar ook bijzonder compact. Ik heb mij dan ook afgevraagd, voor wie het aan te bevelen is van dit werk kennis te nemen. Degene, die nimmer met de problemen van de logistiek in aanraking geweest is, moet niet trachten hier zijn eerste kennis te vergaren. Het boek is echter van veel belang voor hen, die reeds enige kennis van logistiek hebben en deze kennis wensen uit te breiden en te verdiepen.

P. G. J. Vredenduin

Dr. G. B. van Albada, *Panta Rhei*. Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de astronomie aan de universiteit van Amsterdam. Groningen, J. B. Wolters 1959, *f* 1,50.

Deze rede duidt enkele van de belangrijke problemen aan, waarmede de kosmogonie zich in onze tijd bezig houdt. Door de ontwikkeling van onze kennis van

de thermo-nucleaire reacties o.a. is het mogelijk geworden over allerlei onderwerpen uitspraken te doen, die niet meer, zoals vroeger, uitsluitend op speculatie berusten.

Vele van de in deze rede aangeduide problemen, verkeren nog in het stadium van een eerste verkenning, maar toch komt men ervan onder de indruk, wanneer men ziet hoe onze kennis en ons inzicht in de laatste jaren zijn toegenomen.

De rede is het lezen alleszins waard.

Dr. D. N. van der Neut, Drs. A. Holwerda, *Meetkunde met de beginselen der goniometrie*. Deel I, 12e druk. Groningen, J. B. Wolters 1959. Ing. *f* 1,75; geb. *f* 2,25.

Ook het eerste deeltje van dit bekende leerboek is nu aangepast aan het nieuwe programma. Opzet en methode zijn onveranderd gebleven. Een intuïtieve inleiding wordt in een afzonderlijk werkschrift gegeven, wat m.i. de voorkeur verdient boven de verwerking in het leerboek zelf. Veel behoeft over dit werkje niet meer gezegd te worden. Dat van dit boekje in ruim twintig jaar de twaalfde druk verscheen, is m.i. reeds voldoende aanbeveling.

J. F. Hufferman

Dr. L. N. H. Bunt, *Van Ahmes tot Euclides*. Tweede druk. J. B. Wolters, Groningen 1959. Ing. *f* 5,75; geb. *f* 6,50.

Dit boek geeft hoofdstukken uit de geschiedenis der wiskunde en is bedoeld als leerboek voor de A-afdelingen van gymnasia of van de gymnasiale afdelingen van een lyceum.

De eerste druk van dit werk verscheen in 1954 en werd in Euclides 30, bladz. 142-144 uitvoerig door prof. dr. E. J. Dijksterhuis besproken. Voor een beoordeling van opzet en doel van dit werk wil ik gaarne naar deze bespreking verwijzen. Deze tweede druk is op sommige plaatsen bijgewerkt en verbeterd.

De inleidende paragraaf over de Babylonische wiskunde (paragraaf 14) werd uitgebreid, terwijl in § 71 en omgeving de stof zakelijker werd geformuleerd. Toch heb ik hier nog een opmerking. Op bladz. 127 van deze 2e druk staat: nu gaan we een constructie uitvoeren waarmee propositie 2 bewezen kan worden en op bladz. 128: hiermee is tevens propositie 2 bewezen. Maar propositie 2 is toch al in de voorafgaande § 71 bewezen? (vgl. bovendien het slot van opmerking 2). Zou tussenvoegen van „nog eens" de zaak niet verhelderen?

Zo zou misschien ook aan de voorgeschiedenis van de stelling van Pythagoras een aparte paragraaf gewijd kunnen worden.

Het boek is uitstekend geschikt om ook in de leerlingenbibliotheek van een H.B.S. te worden opgenomen. Het is me gebleken dat bepaalde leerlingen van dit schooltype er grote belangstelling voor hebben.

Ik eindig met dit boek van harte aan te bevelen.

Prof. dr. J. H. van Lint. *Een blik in de getaltheorie*. Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de wiskunde aan de Technische Hogeschool te Eindhoven. W. E. J. Tjeenk Willink, Zwolle. 1959. Prijs *f* 1.50.

Een speelse rede, geestig van toon. Ik heb hem achter elkaar uitgelezen. Spreker laat zien hoe onderwerpen uit de getaltheorie die bij wijze van „amusement" beoefend werden nu toepassing vinden in natuurkunde en techniek. Tevens is hij

ervan overtuigd dat alles wat nu nog maar alleen interressant is, op den duur ook wel zijn toepassing in de praktijk zal vinden.

Een rede, die zich in een extra-uur best in een hoogste klas van een V.H.M.O.-school laat bespreken en die de goede leerlingen zeker zal boeien.

Dus aanschaffen en lezen!

J. F. Hufferman

J. Hoepman en drs. A. Yntema. *Planimetrie.* Deel I en II. J. B. Wolters, Groningen 1959. Ing. *f* 3,50; geb. *f* 4,25 per deel.

De laatste jaren heeft, om de entree in de meetkunde voor de leerlingen wat prettiger te maken, de intuïtieve inleiding haar intocht gedaan. Het is dan meest zo dat bij de congruentie weer op de traditionele methode overgestapt wordt. Dit doet dit boek ook. Bovendien is de taal waarin het geschreven werd, voor de leerlingen begrijpelijk.

Een paar opmerkingen:

1) Volgens het voorbericht in deel II hebben de schrijvers geaarzeld of ze de behandeling van de oppervlakken voor- of achteraan zouden plaatsen. In het laatste geval komt dan de behandeling van de evenredigheid van lijnstukken vooraan. De schrijvers plaatsten de oppervlakken achteraan. Ik weet niet of dit wel voldoen zal.

2) In deel II paragraaf 6 staat: we kennen 3 soorten bewijzen. Het directe bewijs, het indirecte bewijs en het bewijs uit het ongerijmde. Is dit wel juist? Is het niet zo dat elk bewijs uit het ongerijmde een indirect bewijs is, maar niet omgekeerd? Vormen, m.a.w. de bewijzen uit het ongerijmde niet een deelverzameling van de verzameling der indirecte bewijzen?

3) De schrijvers blijven spreken van „meetkundige plaatsen". Zou vervanging van deze vakterm door „volledige verzameling" geen aanbeveling verdienen? Het laatste is begrijpelijker.

4) De Pythagoreïsche drietallen in deel II § 40. Zou een afleiding — in kleine letters — niet kunnen worden toegevoegd?

5) Is het juist om bij de invoering van de sin, cos enz. in deel II § 51, direct te spreken van functie en argument? Er wordt verder in het boek toch niets met deze begrippen gedaan?

Dit zijn zo enige punten, die mij het doorlezen opvielen. Goed beoordelen kun je een boek pas als je het gebruikt.

Maar ik geloof dat deze boekjes zeker bruikbaar zullen blijken te zijn. Uiterlijk zien ze er ook goed uit.

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Analytische Meetkunde.* Vierde druk. J. B. Wolters, Groningen. 1959. Ing. *f* 2,25; geb. *f* 2,75.

Dit boekje is aangepast aan het nieuwe leerplan. Volgens het voorbericht is het hoofdstuk over de rechte lijn omgewerkt. Er wordt nu niet meer met vectoren gewerkt, waardoor volgens de schrijver de behandeling eenvoudiger is geworden.

Voor zover ik heb kunnen nagaan geeft het voldoende om aan de eisen van het nieuwe programma te voldoen. De behandeling is duidelijk, zoals dat van deze schrijver te verwachten is.

De omslag kan ik niet zo bewonderen.

J. F. Hufferman

Max Jeger, *Konstruktive Abbildungsgeometrie.* 79 blz. 1959. Verlag Räber en Cie, Luzern. Prijs Z.Fr. 9,80.

Dit is Heft 1 van „Einzelschriften zur Gestaltung des Mathematisch-Physikalischen Unterrichtes".

De ondertitel: Ein Beitrag zur Neuorientierung des Geometrie-unterrichts auf der Mittelschule.

Het zijn de begrippen *Afbeelding* en *Groep*, die de schrijver aanbeveelt in te voeren bij het onderwijs op de middelbare school.

Hij behandelt eerst de *Axiale symmetrie*, daarna de *Translatie*, waarbij dan tevens de *vrije vektor* wordt ingevoerd. Het samenstellen van translaties voert dan tot de definitie van de „groep". Het was misschien duidelijker geweest indien meer nadrukkelijk verklaard was, dat de elementen van een verzameling een groep kunnen vormen *t.o.v. een „operatie"*, dat deze operatie i.h.a. niet-commutatief is, terwijl het woord produkt voor deze operatie, de eerste keer beter tussen aanhalingstekens kan geschreven worden. Maar men kan ook wel iets aan de docent overlaten. Tevens volgt nu de definitie van een ondergroep en enkele voorbeelden van groepen bestaande uit een eindig aantal elementen, waaronder de restklassengroepen modulo p.

Na een bespreking van de *rotatie* is dus de vlakke bewegingsgroep ingevoerd. De schrijver beschouwt nu de groep van 8 afbeeldingen, die een gegeven vierkant op zichzelf afbeeldt, verduidelijkt de verdeling in ondergroepen terwijl de beschouwing van de groep van permutaties van 4 elementen, de gelegenheid geeft, de oorspronkelijke groep weer te zien als een ondergroep van een omvattender groep.

Na bespreking van de vermenigvuldiging t.o.v. een centrum (dus ook de groep van alle vermenigvuldigingen) wordt aangetoond, dat de perspektivische affiniteiten met vaste as een ondergroep vormen van de z.g. volle affiene groep. Een enkele opmerking: De typografische verzorging van dit helder geschreven boekje is uitstekend, jammer dat enkele figuren wat peuterig zijn uitgevallen (speciaal no. 52), in fig. 15 ontbreekt B, in fig. 59 zijn C en $\overline{C}$ verwisseld. We willen echter de Heer *A. Schenk*, leerling van de Oberrealschule te Luzern, die de figuren verzorgde, gaarne verontschuldigen.

Burgers

A. O. Gelfond, *The solution of equations in integers.* Vertaald uit het Russisch door L. F. Boron. 1960, P. Noordhoff, Groningen. *f* 3.75, 72 blz.

Dit helder geschreven boekje vereist geen specialistische kennis van de wiskunde. Voor belangstellenden in dit onderwerp aanbevolen.

W. J. H. Salet e.a. *Vraagstukken over Analyse en Algebra,* deel 1, 5de druk. P. Noordhoff, Groningen 1960. 155 blz. prijs *f* 6.50.

Deze vijfde druk in amper 10 jaar, bewijst wel, dat deze verzameling in een behoefte voorziet. Deze druk komt geheel met de vierde overeen.

Dr. D. J. E. Schrek, *Beknopte Analytische Meetkunde,* 2de druk, P. Noordhoff, Groningen 1960. 155 blz. Prijs *f* 3.90.

In deze tweede druk is rekening gehouden met de nadere toelichting die de H.H. Inspecteurs hebben gegeven op het nieuwe leerplan.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie aangaande deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

31. *a*. Iemand gaat op ongeregelde tijden met de tram naar huis. De trams rijden om de 10 minuten. We nemen aan, dat ze dit werkelijk doen. Bezuiniging doet ze om de 12 minuten rijden. Hoeveel is hij gemiddeld per dag later thuis? *b*. En wat zou het resultaat zijn, als de trams om de andere elkaar zouden opvolgen na 8 en na 12 minuten? Is hij dan later, eerder of even vroeg thuis, als toen ze om de 10 minuten reden?

32. Een dictator wil bevorderen, dat in zijn land meer mannen dan vrouwen wonen. Hij vaardigt daartoe een decreet uit, dat in elk huwelijk geen kinderen meer geboren mogen worden, zodra er een meisje uit dat huwelijk gesproten is. We nemen aan, dat bij elke geboorte de kans op een jongen gelijk is aan die op een meisje. Bereikt de dictator met dit decreet het beoogde doel?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

29. Kies uit de eerste zak 1 kogeltje, uit de tweede zak 2, . . ., uit de tiende zak 10 kogeltjes. Uit de laatste decimaal van het gewicht lezen we dan af, in welke zak zich de zwaardere kogeltjes bevinden.

30. De volgende mogelijkheden doen zich a priori voor. In de tweede kolom zijn de sommen van de oudste en een van de andere vermeld, die meer dan eens voorkomen.

1	9	100			*b*	3	4	75			*a*
1	10	90			*b*	3	5	60	65		*b*
1	12	75			*b*	3	6	50			*b*
1	15	60	61		*b*	3	10	30			*b*
1	18	50			*b*	3	12	25	28,	37	*e*
1	20	45	65		*a*	3	15	20	23,	35	*c*
1	25	36	37,	61	*a*	4	5	45			*b*
2	5	90			*b*	4	9	25	29		
2	6	75			*b*	5	6	30	35		*c*
2	9	50			*b*	5	9	20	25,	29	
2	10	45			*b*	5	10	18	23,	28	*f*
2	15	30			*b*	5	12	15	27		*d*
2	18	25	27		*c*	6	10	15	25		*g*

Uit de eerste ontkenning maakt B op, dat de drie met *a* gemerkte mogelijkheden zich niet voordoen, omdat 4, 20 en 25 slechts één keer als middelste leeftijd voorkomen. Uit de tweede ontkenning maakt A op, dat de met *b* gemerkte mogelijkheden zich niet voordoen. Enz., tot en met *g*.

Nu blijven dus over

4	9	25	29,	(34)
5	9	20	25,	29

B zegt nu, dat hij het weet. Hem is dus niet 29 ingefluisterd, want dan wist hij het nog niet. Evenmin is hem 34 ingefluisterd, want dan had hij het te voren al geweten. Dus blijft over 25, d.w.z. de leeftijden zijn 5, 9 en 20.